Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι:
Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 9

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{a}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $x>0$.
Να αποδείξετε ότι: $f'(x)=a\cdot x^{a-1}$.

Μονάδες 6

Γ. Να απαντήσετε αν είναι **Σωστή** ή **Λάθος** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Μια συνάρτηση $f: \mathrm{A}\to\mathbb{R}$ είναι << 1 – 1 >> αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in \mathrm{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)$

2. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ και υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε $f(a)\cdot f(\beta)<0$.

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,\beta]$ και γνησίως αύξουσα, τότε υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)<0$.

5. Αν $\int_a^\beta f(x)dx=0$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο $[a,\beta]$, τότε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$.

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x}\cdot(\ln x-2), x>0$

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad x>0$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.

Μονάδες 3

γ) Να μελετήσετε τα κοίλα της f και να βρείτε το σημείο της καμπής της.

Μονάδες 8

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=\dfrac{1}{e}$ και $x=e^2$.

Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται ο μιγαδικός $z=e^x+(x-1)i,\quad x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\operatorname{Re}(z)>\operatorname{Im}(z)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ..

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε ο αριθμός $w=z^2+z+2i$ να είναι πραγματικός.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0)=\dfrac{1}{2}$ και $e^x\left[f(x)+f'(x)\right]+\eta\mu x=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $f(x)+f(-x)=\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ..

Μονάδες 7

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx$.

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι: $0\le\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)dx\le\dfrac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6